Муниципальное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №7

Научно-исследовательская работа по информатике

«Решение задач на переливание методом бильярдного шара»

Выполнил: Козырев Дмитрий,
ученик 8 класса МОУ СОШ №7
Научный руководитель:
Шевченко Е.П., учитель информатики

Копейский городской округ, 2010

Содержание

Введение

Во все времена и у всех народов мяч был обязательной принадлежностью множества игр, как на свежем воздухе, так и в закрытом помещении. Разнообразие игр с мячом поистине неисчерпаемо: тут и детская игра с резиновым мячиком, отскакивающим от асфальта, и такие серьезные виды спорта, как теннис, ручной мяч и бильярд, где мастерство игрока во многом зависит от его умения рассчитать угол падения и отражения мяча.

Известно, что математики и физики получают огромное удовольствие от игры в бильярд. Причину этого понять несложно: ведь траекторию шара, отскакивающего от бортов бильярдного стола, можно рассчитать совершенно строго. В условиях сотен занимательных задач фигурирует упругий шар, находящийся внутри самых разнообразных фигур и многократно отражающийся от их границ.

Логические или нечисловые задачи составляют обширный класс таких занимательных задач. Особый интерес вызывает применение метода математического бильярда к решению логических задач на переливания.

Как правило, задачу на переливание можно решить несколькими способами (методами). Чтобы выбрать наиболее простой и эффективный способ для каждой конкретной задачи, необходимо иметь представление обо всех этих способах. Метод математических бильярдов как способ решения задач на переливания практически не используется учащимися: либо он им не знаком, либо не осознан. При решении таких задач всегда возникает потребность в составлении алгоритма последовательного получения всех возможных решений, а также в выборе оптимального решения.

Тема работы: Решение задач на переливание методом бильярдного шара.

Объект исследования: Методы решения логических задач на переливание.

Предмет исследования: Метод «Бильярдного шара» – как один из способов решения задач на переливания.

Цель: Выяснить, является ли применение метода математического бильярда к решению задач на переливание универсальным способом решения задач данного класса.

Задачи:

- ✓ Изучить литературу по заявленной тематике;
- ✓ Выделить основные понятия теории математических бильярдов;
- ✓ Разработать программу, иллюстрирующую возможные типы бильярдных траекторий в прямоугольной области;
- ✓ Познакомиться с основными способами решения логических задач на переливания;
- ✓ Рассмотреть алгоритм решения типичных задач на переливания с помощью метода математического бильярда.

Гипотеза: Метод бильярда значительно упрощает и упорядочивает решение задач на переливания.

Методы исследования: Основным методом исследования в работе является метод математического моделирования, базирующийся на использовании средств компьютерной техники. Под математическим моделированием понимается способ исследования различных явлений, процессов путем исследования явлений, имеющих разное физическое содержание, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями.

Структура работы: Работа состоит из введения, двух параграфов, заключения, списка использованной литературы и приложений. В первом параграфе приводятся основные понятия теории математических бильярдов. Во втором параграфе описывается применение метода математического бильярда к решению задач на переливания. В приложениях приводятся коллекция типичных задач на переливание.

Прямоугольный бильярд на экране компьютера

Задачи о моделировании движения бильярдного шара рассматриваются в математике, физике и информатике. Покажем применение информатики для решения этого вопроса. Пусть бильярдный стол представляет некоторую область Ω. В качестве Ω может быть прямоугольник, тогда имеем прямоугольный бильярд, может быть треугольник, круг, эллипс, выпуклая или произвольная фигура. Будем пренебрегать трением при движении шара, и пусть направление шара меняется только при ударе о борт бильярда по закону абсолютно упругого отображения после удара шара в точке P, т.е. шар движется так, что его угол падения равен углу отражения (рис. 1.1). Если борт бильярда, т.е. граница *Г* области в окрестности точки P, является криволинейным, то углы, образованные и отраженные отрезками траектории, определяются с касательной в точке к линии *Г* (рис. 1.2). Граница может иметь угловые точки. Касательная в такой точке не определена, поэтому можно считать, что траектория бильярда, попавшего в такую точку, заканчивается в ней (рис. 1.3).

Рис. 1.1.

Рис.1.2.

Рис. 1.3.

Общая математическая проблема бильярда заключается в том, чтобы описать возможные типы бильярдных траекторий в данной области Ω. Первый и простейший принцип такого описания – разделение траекторий на периодические, или замкнутые, и остальные – непериодические. На рис. 2. изображены некоторые периодические траектории бильярдов в прямоугольнике, в правильном треугольнике и в круге.

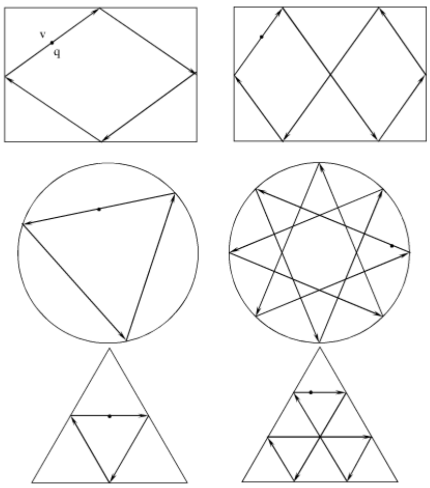


Рис. 2.

Несмотря на часто встречающееся задание в учебниках информатики смоделировать движение шара, решение рассматривается, в основном, в частных случаях:

- При отражении от стенки, если траектория шара перпендикулярна стенке,
- Направление движения шара образует угол 45^0 с горизонтальной стороной прямоугольника.

Рассмотрим задачу в общем случае. Пусть вводятся величины сторон *a*, *b* прямоугольника *П* и координаты скорости v_1, v_2. Стороны прямоугольника будем изображать параллельными координатным осям. Для точки с координатами x_0, y_0 будем употреблять любое из обозначений: A(x_0, y_0), (x_0, y_0).

Траектория равномерного прямолинейного движения задается с помощью уравнений $x = x_0 + v_1 t$, $y = y_0 + v_2 t$, где (x_0, y_0) – начальная точка, *t* – время. С точки зрения физики такой закон движения является правильным и наглядным при изображении бегущей точки на экране компьютера. Большим значениям координат скорости будет соответствовать более быстрое движение точки.

Однако с точки зрения информатики и математики при решении задачи о математическом бильярде возникают проблемы.

Движение точки надо задавать с помощью цикла. Придав значение t=0, получим точку (x_0, y_0), а для t= 1 получим точку (x_0+v_1, y_0+v_2), т.е. за один шаг цикла точка смещается на вектор $\bar{v}$ (v_1, v_2). Если какое-то из значений v_1, v_2 не менее пяти единиц, то на экране компьютера мы не увидим непрерывной траектории. Будут видны точки, т.е. создается впечатление о скачках точки. Конечно, этот эффект можно устранить, уменьшив шаг переменной в цикле. Можно указать зависимость шага в цикле от величины скорости. Скорость движения точки на экране в этом случае уже не будет пропорциональной скорости движения реального объекта при введении различных величин скоростей. Мы будем изучать математический бильярд с помощью информатики, т.е. траекторию точки, поэтому можно пожертвовать наглядностью для скорости движения.

Проще нормировать скорость движения, сохраняя ее направление $m = \frac{v_1}{\sqrt{v_1 + v_2}}$, $n = \frac{v_2}{\sqrt{v_1 + v_2}}$, $m^2 + n^2 = 1$.

При законе движения $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$ изменению шага переменной на 1 соответствует смещение на вектор $\overline{p}(m,n)$, т.е. на одну единицу в указанном направлении. Кстати, компьютер округлит полученные значения для координат точки до целочисленных значений и изобразит точку. Точка может оказаться не на идеальной прямой. Но процесс изображения в этом случае лучше, чем в предыдущем случае. Траектория движения точки воспринимается как непрерывная прямая на экране.

Пусть (x_c, y_c) – центр экрана компьютера, тогда правая вертикальная сторона прямоугольника задается уравнением $x = x_c + \frac{a}{2} = x_p$, левая сторона – $x = x_c - \frac{a}{2} = x_1$, верхняя горизонтальная сторона – уравнением $y = y_c - \frac{b}{2} = y_v$, нижняя сторона – уравнением $y = y_c + \frac{b}{2} = y_n$.

Предположим, что при движении точки A на один шаг она оказалась в точке $B(x, y)$, расположенной правее правой стороны $x = x_p$ (рис. 3). Пусть точка $B'(x', y')$ является симметричной к точке B относительно правой стороны, тогда для середины отрезка BB' получаем $\frac{x + x'}{2} = x_p$, $x' = 2x_p - x$, $y' = y$. Итак, симметричная точка имеет координаты $2x_p - x, y$.

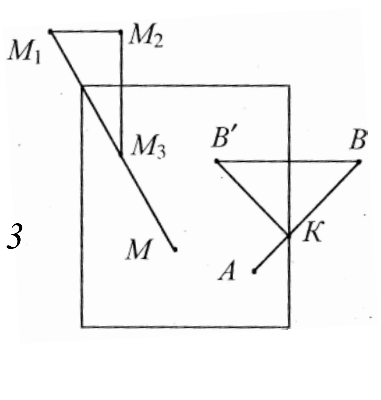


Рис. 3

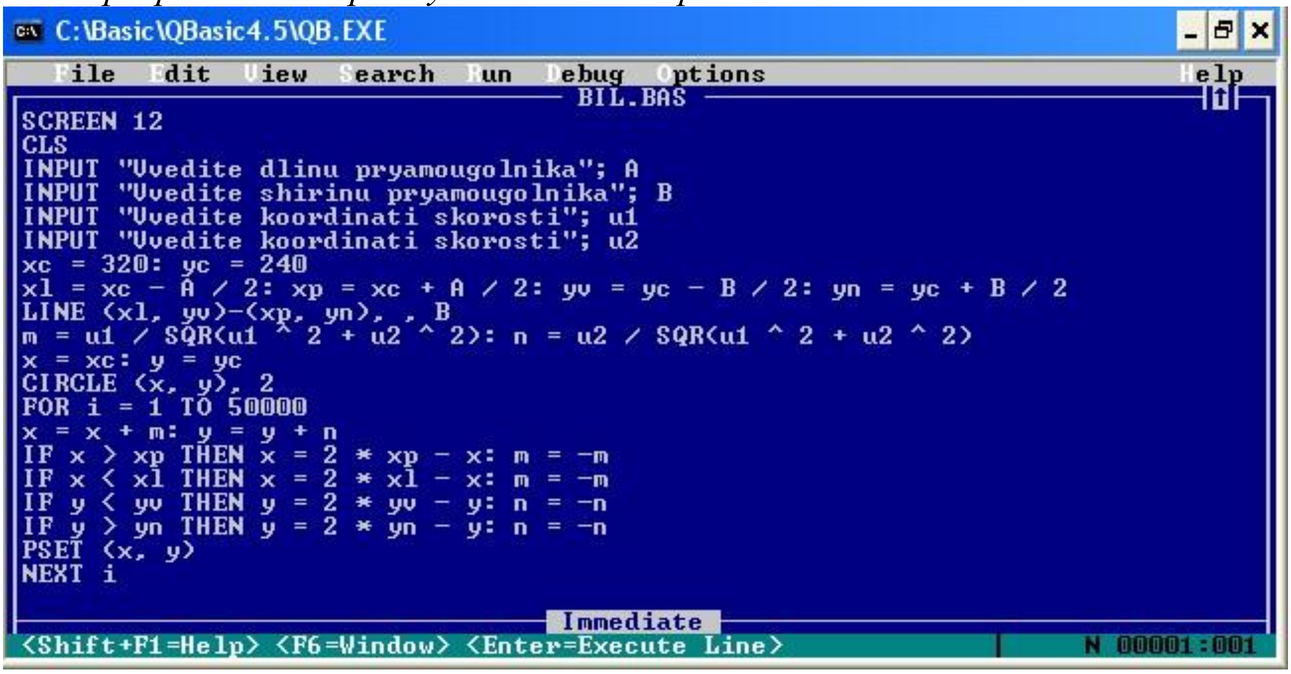
При отражении относительно верхней стороны получаем $(x, y) \rightarrow (x, 2y_v - y)$.

Длина пути AKB' равна длине пути AKB и равна единице. Компьютер снова округлит значения переменных и изобразит точки A и B' соседними точками, а возможно – и совпавшими точками, в зависимости от направления траектории и удаленности точки A от стороны прямоугольника.

Если не нормировать скорость движения, т.е. использовать значения v_1, v_2, то эти точки могут оказаться не соседними, т.е. не будет видно процесса отражения от стенки.

Если луч проходит через вершину прямоугольника, то двукратное применение осевых симметрии относительно перпендикулярных сторон является симметрией относительно точки пересечения прямых, т.е. относительно вершины угла $M_1 \to M_2 \to M_3$. Луч в этом случае отразится от вершины и вернется назад: $M \to M_3$.

Программа для прямоугольного бильярда:




```
SCREEN 12
CLS
INPUT "Uvedite dlinu pryamougolnika"; A
INPUT "Uvedite shirinu pryamougolnika"; B
INPUT "Uvedite koordinati skorosti"; u1
INPUT "Uvedite koordinati skorosti"; u2
xc = 320: yc = 240
xl = xc - A / 2: xp = xc + A / 2: yv = yc - B / 2: yn = yc + B / 2
LINE (xl, yv)-(xp, yn), , B
m = u1 / SQR(u1 ^ 2 + u2 ^ 2): n = u2 / SQR(u1 ^ 2 + u2 ^ 2)
x = xc: y = yc
CIRCLE (x, y), 2
FOR i = 1 TO 50000
x = x + m: y = y + n
IF x > xp THEN x = 2 * xp - x: m = -m
IF x < xl THEN x = 2 * xl - x: m = -m
IF y < yv THEN y = 2 * yv - y: n = -n
IF y > yn THEN y = 2 * yn - y: n = -n
PSET (x, y)
NEXT i
```

Рис. 4.

Замечания:

1. Различные операторы обычно принято писать в программе с новой строки, но мы будем иногда записывать два оператора, близкие по смыслу, в одну строку для экономии места. Такую запись компьютер воспринимает правильно.
2. Предложенную программу можно улучшить с различных точек зрения, наложив условия на вводимые параметры. Например, стороны прямоугольника не должны превосходить размеры экрана, текст о запросе на вводимые параметры не должен накладываться на рисунок и т.д. Для экономии места мы ограничились минимумом…

Решение задач на переливание с помощью математической модели бильярда

Методы решения логических задач на переливание

Решать логические задачи очень увлекательно. Половина решения любой логической задачи (а иногда и гораздо больше половины) состоит в том, чтобы как следует разобраться в условии, распутать все связи между участвующими объектами.

Есть люди, для которых решение логической задачи – увлекательная, но несложная задача. Их мозг как луч прожектора сразу освещает все хитроумные построения, и к правильному ответу он приходит необычайно быстро. Замечательно, что при этом он и не могут объяснить, как они пришли к решению. «Ну, это же очевидно, ясно», – говорят они. «Ведь если ...» – и они начинают легко распутывать клубок противоречивых высказываний. «Действительно, все ясно», – говорит слушатель, огорченный тем, что он сам не увидел очевидного рассуждения. Согласитесь, что такое же ощущение часто возникает при чтении детективов.

Логические задачи можно решать разными способами. Способы разнообразны и каждый из них имеет свою область применения. Для решения задач на переливания чаще всего используются следующие способы решения:

- ✓ Метод рассуждений;
- ✓ Метод таблиц;
- ✓ Метод блок-схем;
- ✓ Метод бильярда.

Метод рассуждений

Способ рассуждений – самый примитивный способ. Этим способом решаются самые простые логические задачи. Его идея состоит в том, что мы проводим рассуждения, используя последовательно все условия задачи, и приходим к выводу, который и будет являться ответом задачи.

Метод таблиц

Метод таблиц – основной прием, который используется при решении текстовых логических задач, заключается в построении таблиц. Таблицы не только позволяют наглядно представить условие задачи или ее ответ, но в значительной степени помогают делать правильные логические выводы в ходе решения задачи.

Метод блок-схем

Более систематический подход к решению задач «на переливание» заключается в использовании блок-схем. Суть этого метода состоит в следующем. Сначала выделяются операции, которые позволяют нам точно отмерять жидкость. Эти операции называются командами. Затем устанавливается последовательность выполнения выделенных команд. Эта последовательность оформляется в виде схемы. Подобные схемы называются блок-схемами и широко используются в программировании. Составленная блок-схема является программой, выполнение которой может привести нас к решению поставленной задачи. Для этого достаточно отмечать, какие количества жидкости удается получить при работе составленной программы. При этом обычно заполняют отдельную таблицу, в которую заносят количество жидкости в каждом из имеющихся сосудов.

Пример: Имеются два сосуда – трехлитровый и пятилитровый. Нужно, пользуясь этими сосудами, получить 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 литров воды. В нашем распоряжении водопроводный кран и раковина, куда можно выливать воду.

Решение. Перечислим все возможные операции, которые могут быть использованы нами, и введем для них следующие сокращенные обозначения: НБ – наполнить больший сосуд водой из-под крана; НМ – наполнить меньший сосуд водой из-под крана; ОБ – опорожнить больший сосуд, вылив воду в раковину; ОМ – опорожнить меньший сосуд, вылив воду в раковину; Б→М – перелить из большего в меньший, пока больший сосуд не опустеет или меньший сосуд не наполнится; М→Б – перелить из меньшего в больший, пока меньший сосуд не опустеет или больший сосуд не наполнится. Выделим среди перечисленных команд только три: НБ, Б→М, ОМ. Кроме этих трех команд рассмотрим еще две вспомогательные команды: Б=0 ? – посмотреть, пуст ли больший сосуд; М=3 ? – посмотреть, наполнен ли малый сосуд.

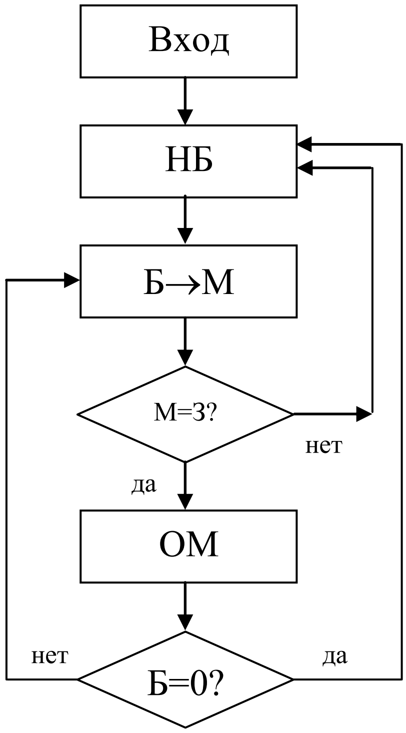


Рис. 5

В зависимости от результатов этого осмотра мы переходим к выполнению следующей команды по одному из двух ключей – «да» или «нет».

Договоримся теперь о последовательности выполнения выделенных команд. После Б→М будем выполнять ОМ всякий раз, как меньший сосуд оказывается наполненным, и НБ всякий раз, как больший сосуд будет опорожнен. Последовательность команд изобразим в виде блок-схемы (Рис. 6.). Начнем выполнение программы. Будем фиксировать, как меняется количество воды в сосудах, если действовать по приведенной схеме. Результаты оформим в виде таблицы (табл.1.)

Таблица 1.

Б	0	5	2	2	0	5	4	4	1	1	0	5	3	3	0	0
М	0	0	3	0	2	2	3	0	3	0	1	1	3	0	3	0

Понятно, что такой метод решения не совсем удачный, в нем трудно выделить какой-либо общий подход к решению других подобных задач.

Обычно задачи на переливание решаются при помощи перебора возможных вариантов. Это не самый удобный способ, так как отсутствует алгоритм перебора, а очень хотелось бы найти универсальный способ решения таких задач.

Метод бильярда

Суть метода заключается в представлении последовательности переливаний аналогично движению бильярдного шарика по столу особой конструкции с размерами, соответствующими объемам первоначально пустых сосудов. Нарисовав на клетчатой бумаге исходную конфигурацию, необходимо проследить возможные движения шарика в соответствии с законом «угол падения равен углу отражения» и попадание им в требуемые точки по условию задачи. Задачи на переливание жидкостей можно очень легко решать, вычерчивая бильярдную траекторию шара, отражающегося от бортов стола, имеющего форму параллелограмма.

Типичные задачи на переливание

В задачах на переливания требуется указать последовательность действий, при которой осуществляется требуемое переливание и выполнены все условия задачи. Если не сказано ничего другого, считается, что

- ✓ Все сосуды без делений;
- ✓ Нельзя переливать жидкости «на глаз».

Мы можем точно сказать, сколько жидкости в сосуде, только в следующих случаях.

- ✓ Знаем, что сосуд пуст;
- ✓ Знаем, что сосуд полон, а в задаче дана его вместимость;
- ✓ В задаче дано, сколько жидкости в сосуде, а переливания с использованием этого сосуда не проводились;
- ✓ В переливании участвовали два сосуда, в каждом из которых известно, сколько было жидкости, и после переливания вся жидкость поместилась в один из них;
- ✓ В переливании участвовали два сосуда, в каждом из которых известно, сколько было жидкости, известна вместимость того сосуда, в который переливали, и известно, что вся жидкость в него не поместилась: мы можем найти, сколько ее осталось в другом сосуде.

Приведем типичные задачи на переливание.

Задачи на получение некоторого количества жидкости из большого или бесконечного по объему сосуда, водоема или источника с помощью двух пустых сосудов

В данном разделе рассматриваются задачи, в которых вместо одного из сосудов присутствует бесконечный или большой источник, водоем, из которого можно набирать жидкость любое количество раз, а также сливать жидкость в него.

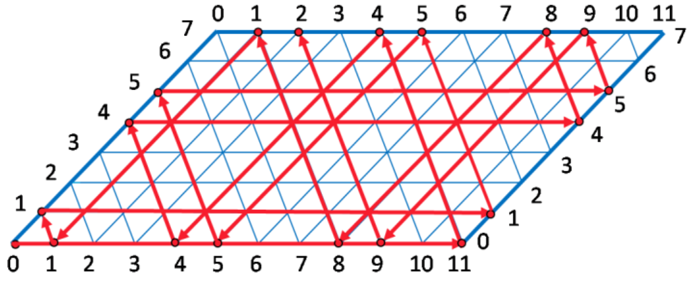


Рис. 6

Рассмотрим задачу: как с помощью сосудов объемом 7 и 11 литров и бочкой с водой отмерить 2 литра воды.

Как ни странно, но головоломки на переливание жидкостей можно очень легко решать, вычерчивая бильярдную траекторию шара, отражающегося от бортов ромбического стола. Границы таких столов удобнее всего рисовать на бумаге, на которую нанесена сетка из одинаковых равносторонних треугольников. В рассматриваемой задаче стороны стола должны иметь длины 7 и 11 единиц (рисунок 5).

Таблица 2.

№	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
11 литров	11	4	4	0	11	8	8	1	1	0	11	5	5	0	11	9	9	2
7 литров	0	7	0	4	4	7	0	7	0	1	1	7	0	5	5	7	0	7

По горизонтали отложено количество воды в 11-литровом сосуде в любой момент времени, а по вертикали – та же величина для 7-литрового сосуда.

Как же пользоваться диаграммой? Представьте себе, что шар находится в левой нижней вершине в точке 0. Он будет перемещаться вдоль нижнего основания ромба до тех пор, пока не достигнет правой боковой стороны в точке 11. Это означает, что 11-литровый сосуд наполнен до краев, а 7-литровый пуст.

Отразившись упруго от правого борта, шар покатится вверх и влево и ударится о верхний борт в точке с координатами 4 по горизонтали и 7 по вертикали. Это означает, что в 11-литровом сосуде осталось всего 4 литра воды, а 7 литров из него перелили в меньший сосуд.

Прослеживая дальнейший путь шара и записывая все этапы его движения до тех пор, пока он не попадет в точку 2 верхнего борта, вы получите ответ и узнаете, в какой последовательности необходимо производить переливания, чтобы отмерить 2 литра воды. Все 18 переливаний изображены схематически на рис. 1. Наклонные стрелки говорят о том, что вода переливается из одного сосуда в другой, а вертикальные означают, что либо вода целиком выливается из меньшего сосуда обратно в бочку, либо больший сосуд надо наполнить водой до краев.

Является ли это решение самым коротким? Нет, существует второй путь, когда воду сначала наливают в 7-литровый сосуд. На диаграмме (рис. 6) это соответствует тому, что шар из точки 0 катится вверх вдоль левого борта до тех пор, пока не ударится в верхний борт. Нарисовав траекторию бильярдного шара, читатель убедится в том, что точка 2 достигается на этот раз за 14 отражений от борта. Полученное решение с 14 переливаниями уже является самым коротким.

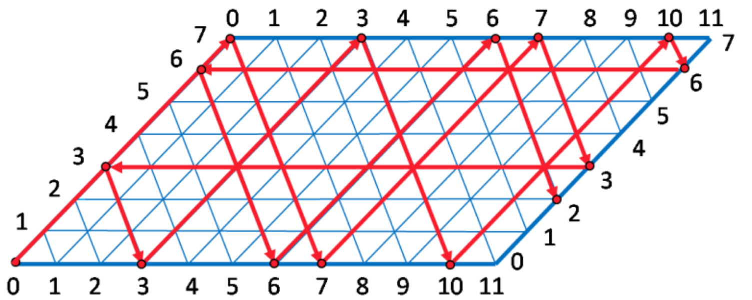


Рис. 7.

Таблица 3.

№	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
11 литров	0	7	7	11	0	3	3	10	10	11	0	6	6	11
7 литров	7	0	7	3	3	0	7	0	7	6	6	0	6	2

Задачи на переливание сосудов конечного объема

Задача. Имеются три сосуда вместимостью 8, 5 и 3 литра. Наибольший сосуд полон молока. Как разделить это молоко на две равные части, используя остальные сосуды?

В рассматриваемой задаче стороны параллелограмма должны иметь длины 3 и 5 единиц. По горизонтали будем откладывать количество воды в литрах в 5-литровом сосуде, а по вертикали – в 3-литровом сосуде. На всем параллелограмме нанесена сетка из одинаковых равносторонних треугольников (см. рис. 8). Главная диагональ параллелограмма разделена на 8 равных частей, относится к 8-литровому сосуду.

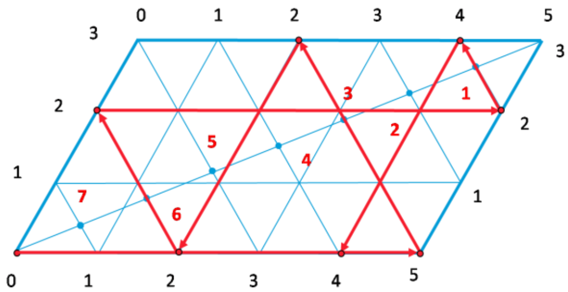


Рис. 8.

Бильярдный шар может перемещаться только вдоль прямых, образующих сетку на параллелограмме. После удара о стороны параллелограмма шар отражается и продолжает движение вдоль выходящего из точки борта, где произошло соударение. При этом каждая точка параллелограмма, в которой происходит соударение, полностью характеризует, сколько воды находится в каждом из сосудов.

Пусть шар находится в левом нижнем углу и после удара начнет перемещаться вверх вдоль левой боковой стороны параллелограмма до тех пор, пока не достигнет верхней стороны в точке A. Это означает, что мы полностью наполнили водой малый сосуд. Отразившись упруго, шар покатится вправо вниз и ударится о нижний борт в точке B, координаты которой 3 по горизонтали и 0 по вертикали. Это означает, что в большом сосуде 3 литра воды, а в малом сосуде воды нет, то есть мы перелили воду из малого сосуда в большой сосуд.

Прослеживая дальнейший путь шара, и записывая все этапы его движения в виде отдельной таблицы (табл.4.), в конце концов, мы попадаем в точку, которая соответствует состоянию, когда малый сосуд пуст, а в большом сосуде 4 литра воды. Таким образом, получен ответ и указана последовательность переливаний, позволяющих отмерить 4 литра воды. Все 8 переливаний изображены схематически в таблице.

Таблица №4.

№	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
5 литров	0	0	0	3	3	5	0	1	4
3 литра	0	3	0	3	1	1	0	3	0

Является ли это решение самым коротким? Нет, существует второй путь, когда воду сначала наливают в пятилитровый сосуд. Если на диаграмме шар из точки О покатится вправо по нижней стороне параллелограмма и затем, отразившись от правой боковой стороны, в точку 2 на верхней стороне параллелограмма и т.д., то получим более короткое решение задачи. Можно показать, что полученное решение с 6 переливаниями уже является самым коротким.

Таблица 5.

№	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
5 литров	0	0	0	3	3	5	0	1
3 литра	0	3	0	3	1	1	0	3
8 литров	8	3	3	6	6	1	1	4

По сути, в данных задачах реализуются два алгоритма.

Первый: последовательно из большего сосуда наполняется меньший сосуд, из него жидкость сливается в сосуд промежуточного объема, эти два действия повторяются до полного наполнения сосуда промежуточного объема, после чего жидкость из него сливается в самый большой. Процедура повторяется несколько раз до тех пор, пока два меньших сосуда будут пустыми, а вся жидкость окажется в большом сосуде. Таким образом, будут реализованы все возможные варианты наполнения сосудов.

Второй алгоритм соответствует действиям первого, записанным в обратном порядке, т.е. с конца. Сначала из большего сосуда наполняется сосуд промежуточного объема. Из него жидкость переливается в самый маленький, а из наименьшего – в наибольший. Два последних действия повторяются до тех пор, пока сосуд промежуточного объема не станет пустым. Тогда он наполняется жидкостью из самого большого сосуда. Эта процедура повторяется до возвращения к исходному состоянию.

Решение задачи можно получить и по первому и по второму алгоритму, выбирается более короткий вариант.

Условие разрешимости задач

Если объемы двух меньших сосудов не имеют общего делителя (т. е. взаимно просты), а объем третьего сосуда больше или равен сумме объемов двух меньших, то с помощью этих трех сосудов можно отмерить любое целое число литров, начиная с 1 литра и кончая объемом среднего сосуда.

Имея, например, сосуды вместимостью 15, 16 и 31 литр, вы сумеете отмерить любое количество воды от 1 до 16 литров. Такая процедура невозможна, если объемы двух меньших сосудов имеют общий делитель.

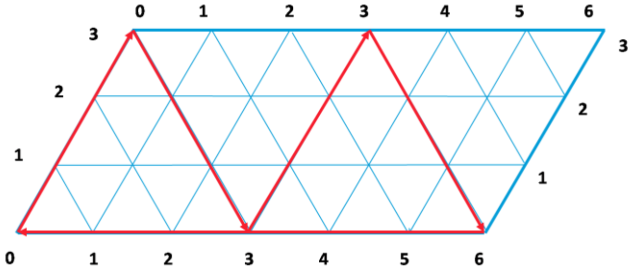


Рис. 9

Когда объем большего сосуда меньше суммы объемов двух других, возникают новые ограничения. Если, например, объемы сосудов равны 7, 9 и 12 литрам, то у ромбического стола надо отсечь верхний правый угол (рис. 9). Тогда шар сможет попасть в любую точку от 1 до 9, за исключением точки 6. Несмотря на то, что 7 и 9 взаимно просты, отмерить 6 литров воды оказывается невозможным из-за того, что самый большой сосуд имеет слишком маленький объем.

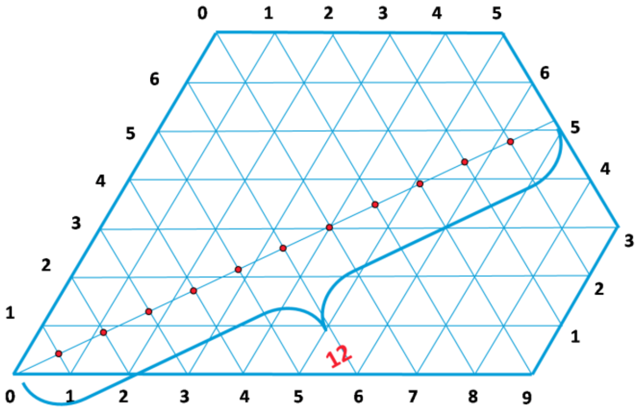


Рис. 10

Заключение

Для выяснения того, является ли применение метода математического бильярда к решению задач на переливание универсальным способом решения задач данного класса, нами были рассмотрены различные способы решения логических задач на переливание.

При рассмотрении способов решения задач на переливание установлено, что все задачи имеют как минимум два способа решения, одно из которых всегда более рационально, но для того, чтобы установить, какое, надо рассмотреть разные варианты решений.

В работе подробно рассмотрено применение «Метода бильярда» к решению задач на переливание. Приведены модели таких задач, условия разрешимости и алгоритмы решения с помощью рассматриваемой модели. Выяснено, что данный подход позволяет быстро оценить, все ли объемы можно получить, т.е. во всех ли точках бильярдного стола мы сможем оказаться или же получение каких-то объемов невозможно. Этот метод дает единообразный и систематический подход к решению задач на переливания.

Таким образом, *гипотеза* о том, что метод бильярда значительно упрощает и упорядочивает решение задач на переливания, *полностью подтвердилась*.

При использовании метода бильярда имеется возможность составления задач о переливаниях различного уровня сложности, рассмотрения возможных подходов к решению задач подобного типа.

Кроме этого, исследование различных возможностей, возникающих при использовании сосудов различных объемов, с помощью метода «бильярдного шара» чрезвычайно увлекательно.

Рассматриваемые задачи традиционно встречаются на олимпиадах по математике и информатике различного уровня, и, несомненно, данная работа будет отличным подспорьем, для желающих научится решать данные задачи.

Список использованной литературы

1. Борахеостов В. Бильярды // Наука и жизнь, 1966, №№ 2-4, 6, 11
2. Гальперин Г.А. Бильярды //Квант, 1981, №4
3. Гальперин Г.А. Периодические движения бильярдного шара// Квант, 1989, № 3
4. Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики). – М.: Наука, 1990
5. Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды. Бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики. Выпуск 77 серии «Библиотечка Квант») – М.: Наука, 1990
6. Земляков А.Н. Арифметика и геометрия столкновений // Квант, 1978, №4
7. Земляков А.Н. Бильярды и поверхности // Квант, 1979, № 9
8. Земляков А.Н. Математика бильярда // Квант, 1976, № 5
9. Кориолис Г.Г. Математическая теория явлений бильярдной игры – М.: Гостехиздат, 1956
10. Совертков П.И. Занимательное компьютерное моделирование в элементарной математике: Учебное пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2004
11. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах – М.: Наука, 1986 (Библиотечка «Квант», Вып. 56)

Приложение 1

1. Две группы туристов готовятся к походу. Для приготовления еды они используют примусы, которые заправляют бензином. В лагере имеется 10-литровая канистра бензина. Имеются еще пустые сосуды в 7 и 2 литров. Как разлить бензин в два сосуда по 5 литров в каждом?
2. Как разделить поровну между двумя семьями 12 литров хлебного кваса, находящегося в двенадцатилитровом сосуде, воспользовавшись для этого двумя пустыми сосудами: 8-литровым и 3-литровым?
3. У Карлсона есть ведро варенья, оно вмещает 7 литров. У него есть 2 пустых ведерка – 4-литровое и 3-литровое. Помогите Карлсону отлить 1 литр варенья к чаю в меньшее (3-литровое) ведерко, оставив 6 литров в большом (7-литровом) ведре.
4. Летом Вини-Пух сделал запас меда на зиму и решил разделить его пополам, чтобы съесть половину до Нового Года, а другую половину – после Нового года. Весь мед находится в ведре, которое вмещает 6 литров, у него есть 2 пустые банки – 5-литровая и 1-литровая. Может ли он разделить мед так, как задумал?
5. На другой год Вини-Пух запасся 10 литрами меда. Под руками у него два ведра – 7-литровое и 4-литровое. Как ему разделить мед пополам?
6. (Пересыпашка) Разбойники раздобыли 10 унций (1 унция – примерно 30 $см^3$) золотого песка. У них имеется две пустые коробки, емкостью 6 и 4 унции. Как им разделить песок пополам? Если на одно пересыпание требуется 1 минута, то сколько времени они будут делить свою добычу?
7. Некто имеет полный бочонок сока емкостью 12 пинт (пинта – 0,57 литра) и хочет подарить половину своему другу. Но у него нет сосуда в 6 пинт, а есть два сосуда в 8 пинт и 5 пинт. Каким образом можно налить 6 пинт в сосуд емкостью 8 пинт?
8. Белоснежка ждет в гости гномов. Зима выдалась морозной и снежной, и Белоснежка не знает наверняка, сколько гномов решатся отправиться в далекое путешествие в гости, однако знает, что их будет не более 12. В ее хозяйстве есть кастрюлька на 12 чашек, она наполнена водой, и две пустых – на 9 чашек и на 5. Можно ли приготовить кофе для любого количества гостей, если угощать каждого одной чашкой напитка?
9. Разрешима ли предыдущая задача, если в хозяйстве у Белоснежки имеются кастрюлька с водой на 12 чашек и пустые кастрюльки на 9 и 7 чашек?
10. Для путешествия по морю необходим запас пресной воды. В плавании вода расходуется со скоростью 1 бочка в сутки. В некоторый момент времени запас воды на берегу составлял 8 бочек, и вода находилась в баке, заполненном до краев. На яхте имеется такой же бак, объемом 8 бочек, но пустой. На сколько дней можно планировать путешествие, если с собой нельзя брать лишнюю воду, а в распоряжении имеется еще две пустых емкости объемом 3 и 6 бочек и их можно использовать для переливания воды?

Приложение 2

1. Для разведения картофельного пюре быстрого приготовления «Зеленый великан» требуется 1 л воды. Как, имея два сосуда емкостью 5 и 9 литров, налить 1 литр воды из водопроводного крана.
2. Для марш-броска по пустыне путешественнику необходимо иметь 4 литра воды. Больше он взять не может. На базе, где имеется источник воды, выдают только 5-литровые фляги, а также имеются 3-литровые банки. Как с помощью одной фляги и одной банки набрать 4 литра во флягу?
3. В походе приготовили ведро компота. Как, имея банки, вмещающие 500 г и 900 г воды, отливать компот порциями по 300 г?
4. Нефтяники пробурили скважину нефти. Необходимо доставить в лабораторию на экспертизу 6 литров нефти. В распоряжении имеется 9-литровый и 4-литровый сосуды. Как с помощью этих сосудов набрать 6 литров?
5. Как решить предыдущую задачу, если на экспертизу необходимо доставить 5 литров нефти, а емкости сосудов составляют соответственно 7 литров и 3 литра?
6. Как с помощью двух бидонов емкостью 17 литров и 5 литров отлить из молочной цистерны 13 литров молока?
7. К продавцу, стоящему у бочки с квасом, подходят два веселых приятеля и просят налить им по литру кваса каждому. Продавец замечает, что у него есть лишь две емкости в 3 л и 5 л, и поэтому он не может выполнить их просьбу. Приятели продолжают настаивать и дают продавцу 100 рублей (сумма зависит от финансово-экономической ситуации в стране и соответственно варьируется) с одним условием, что они получат свои порции одновременно. После некоторого размышления продавец сумел это сделать. Каким образом?