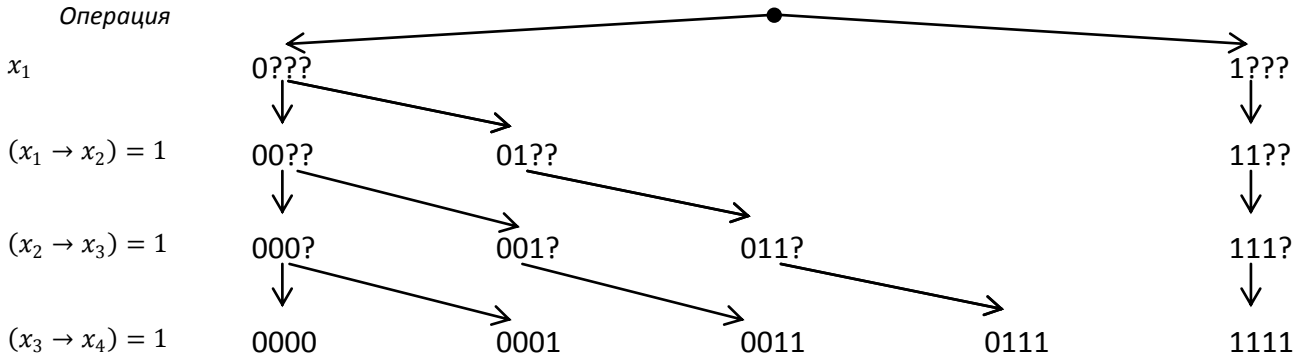
$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_4) = 1$
$(\neg y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee y_3) \wedge (\neg y_3 \vee y_4) = 1$
$(y_1 \to x_1) \wedge (y_2 \to x_2) \wedge (y_3 \to x_3) \wedge (y_4 \to x_4) = 1$

Начнем с анализа первого уравнения $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_4) = 1$.

Чтобы найти все возможные комбинации значений переменных, задействованных в первом уравнении, удобнее всего выполнить построение дерева решений: это позволит не запутаться и не пропустить какие-то варианты. При построении дерева на каждом его очередном шаге анализируется очередная пара переменных и для каждой имеющейся ветви определяются дальнейшие варианты ветвления. Слева указаны логические операции следования, которые и анализируются на соответствующих шагах (уровнях дерева). Ключевым моментом при построении дерева является тот факт, что для получения единичного результата из нуля может следовать любое значение второй переменной, а из единицы – *только* единица.

Основную идею при построении данного дерева можно условно выразить фразой: «*размножаются только нули*». То есть если мы уже имеем начало набора значений наших четырех переменных, которое на данный момент завершается нулем, то продолжить его можно как нулем, так и единицей (в дереве имеется ветвление), но если текущая последовательность заканчивается единицей, то продолжать ее можно *только* единицей, и в дереве не будет никакого ветвления, а только продолжение уже существующей ветви.



Полный набор возможных значений переменных, удовлетворяющих первому уравнению, тогда содержится в самой нижней строке построенного дерева (в его «листьях»): ($x_1x_2x_3x_4$) = (0000), (0001), (0011), (0111), (1111).

Второе уравнение $(\neg y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee y_3) \wedge (\neg y_3 \vee y_4) = 1$ при помощи закона логики «Выражение импликации через отрицание и логическое сложение» преобразуем в уравнение вида $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_3) \wedge (y_3 \to y_4) = 1$. Заметим, что первое и второе уравнения заданной системы практически идентичны (с точностью до имен переменных – *y* вместо *x*), и это существенно облегчает нашу работу.

Второе уравнение анализировать нет необходимости, и мы можем сразу записать набор возможных для него значений переменных: ($y_1y_2y_3y_4$) = (0000), (0001), (0011), (0111), (1111).

Именно третье уравнение $(y_1 \to x_1) \wedge (y_2 \to x_2) \wedge (y_3 \to x_3) \wedge (y_4 \to x_4) = 1$, в котором одной логической операцией связаны «иксы» и «игреки», является «ключом», определяющим выбор: какие из найденных комбинаций наборов значений ($x_1x_2x_3x_4$) и ($y_1y_2y_3y_4$) нам годятся, а какие – нет.

Представим третье уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} (y_1 \to x_1) = 1 \\ (y_2 \to x_2) = 1 \\ (y_3 \to x_3) = 1 \\ (y_4 \to x_4) = 1 \end{cases}$$

Посмотрим на запись первого уравнения полученной системы $(y_1 \to x_1) = 1$:

Согласно ему, из всех найденных пар наборов значений «иксов» и «игреков» нам подходят только такие, в которых значения указанных переменных соответствуют истинности заданной логической операции, т.е.:

- когда в наборе значений ($y_1y_2y_3y_4$) первая цифра равна нулю, в пару с ним годятся любые наборы значений ($x_1x_2x_3x_4$), поскольку что бы в них ни стояло в первой позиции (0 или 1), результат операции $y_1 \to x_1 = 1$ будет равен 1 в любом случае;
- когда в наборе значений ($y_1y_2y_3y_4$) первая цифра равна единице, в пару с ним годятся только такие наборы значений ($x_1x_2x_3x_4$), в которых первая цифра равна 1.

Удобнее и нагляднее всего расписать все получаемые комбинации значений *x* и *y* в виде таблицы (матрицы решений). Анализируемые цифры в ней выделены цветом и подчеркиванием.

Матрица решений

$y_1y_2y_3y_4$	$x_1x_2x_3x_4$																			
	0000				0001				0011				0111				1111			
0000	+				+				+				+				+			
0001	+				+				+				+				+			
0011	+				+				+				+				+			
0111	+				+				+				+				+			
1111	-				-				-				-				+			

Аналогично анализируем второй уравнение системы $(y_2 \to x_2) = 1$

$y_1y_2y_3y_4$	$x_1x_2x_3x_4$																			
	0000				0001				0011				0111				1111			
0000	+	+			+	+			+	+			+	+			+	+		
0001	+	+			+	+			+	+			+	+			+	+		
0011	+	+			+	+			+	+			+	+			+	+		
0111	+	-			+	-			+	-			+	+			+	+		
1111	-	-			-	-			-	-			-	+			+	+		

Третье уравнение системы $(y_3 \to x_3) = 1$

$y_1y_2y_3y_4$	$x_1x_2x_3x_4$																			
	0000				0001				0011				0111				1111			
0000	+	+	+		+	+	+		+	+	+		+	+	+		+	+	+	
0001	+	+	+		+	+	+		+	+	+		+	+	+		+	+	+	
0011	+	+	-		+	+	-		+	+	+		+	+	+		+	+	+	
0111	+	-	-		+	-	-		+	-	+		+	+	+		+	+	+	
1111	-	-	-		-	-	-		-	-	+		-	+	+		+	+	+	

Четвертое уравнение $(y_4 \to x_4) = 1$

$y_1y_2y_3y_4$	$x_1x_2x_3x_4$																			
	0000				0001				0011				0111				1111			
0000	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0001	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0011	+	+	-	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0111	+	-	-	-	+	-	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1111	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+

В последней таблице находим такие ячейки, в которых записаны «++++». Количество таких ячеек соответствует количеству решений исходной системы – 15.

$y_1y_2y_3y_4$	$x_1x_2x_3x_4$				
	0000	0001	0011	0111	1111
0000	++++	++++	++++	++++	++++
0001	+++-	++++	++++	++++	++++
0011	++--	++-+	++++	++++	++++
0111	+---	+--+	+-++	++++	++++
1111	----	---+	--++	-+++	++++

Ответ: 15 решений

Использованная литература:

1. О.Б. Богомолова, Д.Ю. Усенков «B15: новые задачи и новое решение» // газета «Информатика», №6, 2012, стр. 35-40.